SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe





SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Inecuación polinomial I

Docente: Phflucker H. Coz

academiacesarvallejo.edu.pe

INECUACIÓN LINEAL

Su forma general es: $ax + b \gtrless 0$; $a \neq 0$

Resolución

Consideremos: $ax + b > 0 \rightarrow ax > -b$

Si: $a > 0 \longrightarrow x > -\frac{b}{a} \longrightarrow CS = \left\langle -\frac{b}{a}; +\infty \right\rangle$

Si: $a < 0 \longrightarrow x < -\frac{b}{a} \longrightarrow CS = \left\langle -\infty; -\frac{b}{a} \right\rangle$

Ejemplo

Resuelva la inecuación lineal: $x - \frac{1}{2} \geq \frac{2x}{3} + 5$

Resolución

Despejamos x en la inecuación lineal:

$$x - \frac{2x}{3} \geq 5 + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{3} \geq \frac{11}{2} \rightarrow x \geq \frac{33}{2} = 16{,}5$$

$-\infty$ 16,5 $+\infty$

$\therefore$ CS $= [16{,}5 ; +\infty\rangle$

Ejercicio (1)

Luego de resolver la inecuación $mx + 1 \geq 3x + n$ en variable x, se obtiene CS $= \mathbb{R}$. Halle la variación de mn.

A) $\langle -\infty; 1\rangle$ B) $\langle 2; +\infty\rangle$ C) $\langle -\infty; 3\rangle$
D) $\langle -\infty; 2\rangle$ E) $\langle 4; +\infty\rangle$

Resolución:

Escribimos convenientemente la inecuación:

$mx + 1 \geq 3x + n \rightarrow (m - 3)\, x \geq n - 1$

Si la inecuación tiene CS $= \mathbb{R}$, entonces es de la forma: $(0)\, x \geq (-)$. Luego:

$m - 3 = 0 \wedge n - 1 < 0 \rightarrow m = 3 \wedge n < 1$

$\rightarrow 3n < 3 \rightarrow mn < 3$

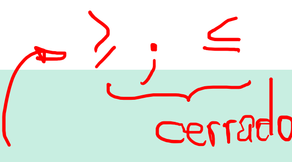
$\therefore mn \in \langle -\infty; 3\rangle$



Rta ⟨-∞;3]

MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS (P.C.)

Ejemplo



Resuelva la inecuación

$$\underbrace{(x-2)(x+3)(x+1)}_{P(x)} \leq 0$$

Resolución

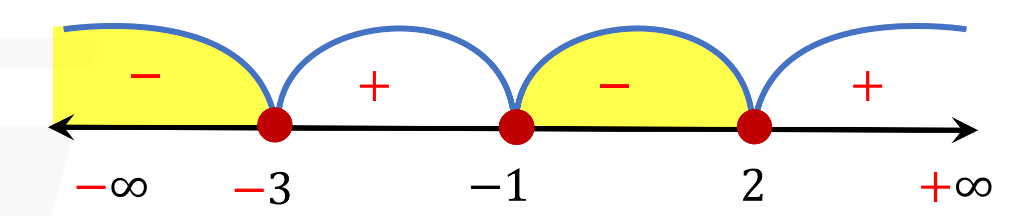
Pasos para aplicar el método de los P.C.:

- Garantizamos que el coeficiente principal de cada uno de los factores lineales de $P(x)$ sea positivo.
- Hallamos los puntos críticos (o raíces) del polinomio $P(x)$ igualando a cero cada uno de sus factores lineales.



Puntos críticos: 2 ; -3 ; -1

- Ubicamos los puntos críticos en la recta real y separamos por zonas.
- Colocamos los signos $(+)$ o $(-)$ en las zonas de forma alternada, empezando de derecha a izquierda con el signo $(+)$.



- Finalmente hallamos el C.S. según el siguiente criterio:

$P(x) > 0 \longrightarrow$ C. S. = zona $(+)$ y P.C. abiertos.

$P(x) \geq 0 \longrightarrow$ C. S. = zona $(+)$ y P.C. cerrados.

$P(x) < 0 \longrightarrow$ C. S. = zona $(-)$ y P.C. abiertos.

$P(x) \leq 0 \longrightarrow$ C. S. = zona $(-)$ y P.C. cerrados.

Para nuestro ejemplo, elegimos las zonas de signo $(-)$ y los extremos finitos cerrados, es decir:

$$\therefore \; C.S. = \langle -\infty; -3] \cup [-1; 2]$$



INECUACIÓN CUADRÁTICA

Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0 \qquad a \neq 0$$

Ejemplos:

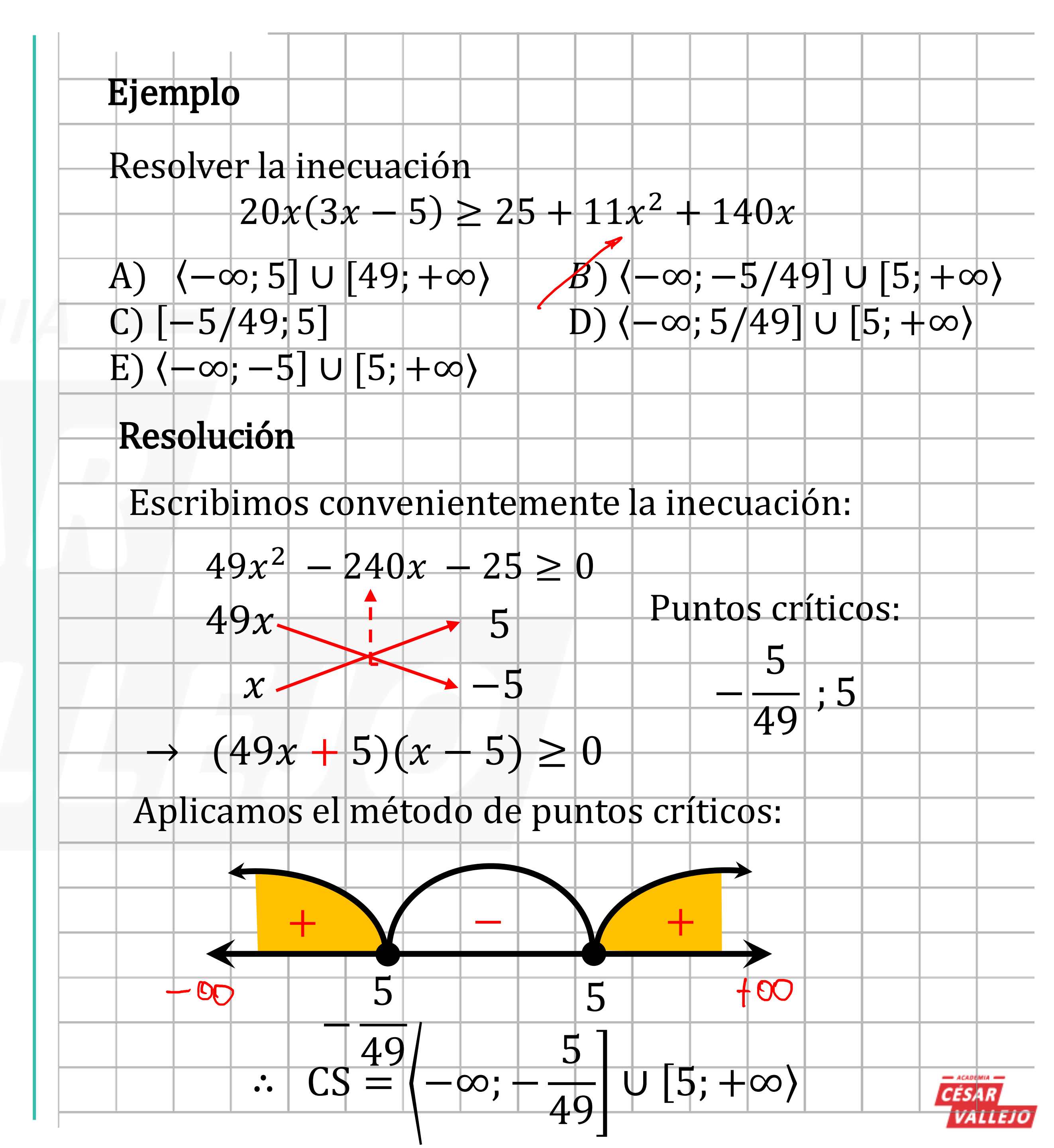
- $5x^2 + 3x - 7 > 0$
- $x^2 - 10 \leq 0$

Resolución de la inecuación cuadrática

1) La inecuación cuadrática debe estar en su forma general y es conveniente que su coeficiente principal sea positivo ($a > 0$).
2) Calculamos el discriminante, según su resultado existen 3 casos.

Caso I: $(\Delta > 0)$

Halle sus dos raíces (por factorización o fórmula general), luego aplique el criterio de los puntos críticos e indique el CS.



Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación

$$-x^2 + 6 > -2\sqrt{2}x$$

A) $\langle -\sqrt{2}; 2\sqrt{2} \rangle$ B) $\langle \sqrt{2}; 3\sqrt{2} \rangle$ C) $\langle -\sqrt{2}; 3\sqrt{2} \rangle$

D) $\langle -\infty; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle 3\sqrt{2}; +\infty \rangle$ E) $\langle -3\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$

Resolución:

Escribimos convenientemente la inecuación:

$$x^2 \quad - \; 2\sqrt{2}x \quad - 6 < 0$$

$$x \qquad \sqrt{2}$$

$$x \qquad -3\sqrt{2}$$

Puntos críticos:

$$-\sqrt{2}\,;\,3\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \; (x + \sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) < 0$$

$+ \qquad - \qquad +$

$-\sqrt{2} \qquad 3\sqrt{2}$

$$\therefore \quad CS = \langle -\sqrt{2}\,;\,3\sqrt{2} \rangle$$

Observación

Si una inecuación cuadrática $ax^2 + bx + c \gtrless 0$ tiene como

raíces

$$CS = \langle m\,;n \rangle \quad \text{o} \quad CS = \langle -\infty; m] \cup [n; +\infty \rangle$$

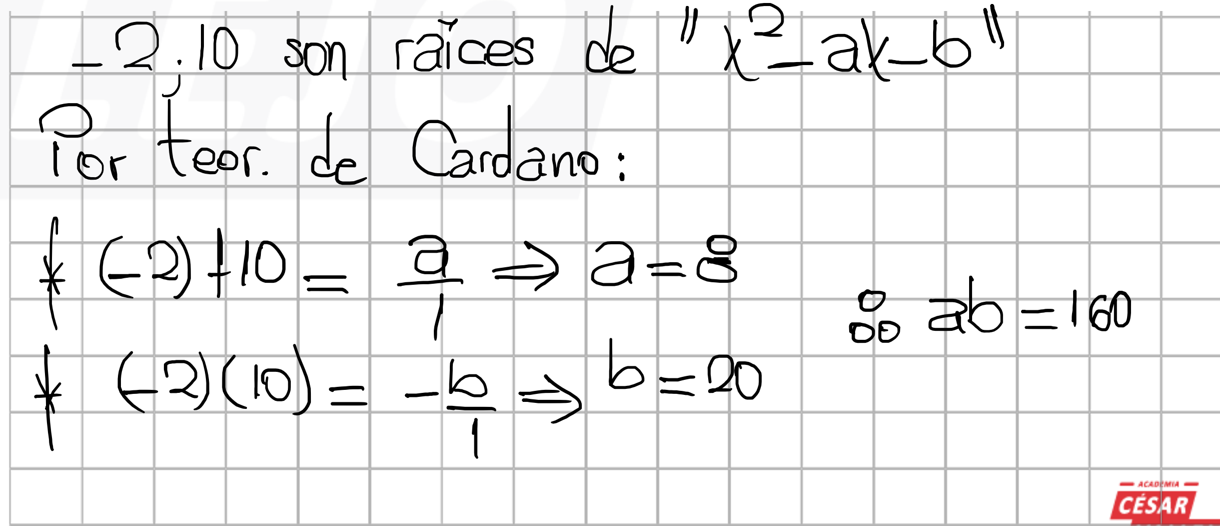
Entonces m y n son raíces de la cuadrática y se puede aplicar el Teorema de Cardano.

Ejercicio (2):

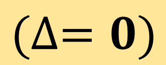
Determine ab si la inecuación $x^2 - ax - b \geq 0$ tiene como $CS = \langle -\infty; -2] \cup [10; +\infty \rangle$

raíces

Resolución:



Caso II:



El polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y por simple inspección se obtiene el conjunto solución.

Ejemplo

Resolver la siguiente inecuación



$$4x^2 - 12x + 9 \geq 0$$

Resolución:

$$4x^2 - 12x + 9 \geq 0$$

Notamos que su $\Delta = (-12)^2 - 4(4)(9) = 0$

Entonces la cuadrática es un TCP

$$\longrightarrow (2x - 3)^2 \geq 0$$

$$\therefore \quad CS = \mathbb{R}$$

También tenga en cuenta lo siguiente:

Si: $(2x - 3)^2 \geq 0 \longrightarrow CS = \mathbb{R}$

Si: $(2x - 3)^2 > 0 \longrightarrow CS = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$2x - 3 \neq 0$

$x \neq \frac{3}{2}$

Si: $(2x - 3)^2 \leq 0 \longrightarrow CS = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ (Solución única)

Si: $(2x - 3)^2 < 0 \longrightarrow CS = \emptyset$

Observación

Si el conjunto solución de:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0 \ ; \quad a \neq 0$$

es de la forma $\{\beta\}$ o $\mathbb{R} - \{\beta\}$ entonces

$$a > 0 \quad \wedge \quad \Delta = 0$$

Además α es raíz doble del polinomio.



Ejercicio (3)

Determine el valor de $b+m$ si la inecuación

$$2x^2-2x+b\leq 0$$

tiene $CS=\{m\}$.

A) 6 B) 1/2 C) 4 D) 1 E) 3

Resolución:

Como la inecuación:

$$2x^2-2x+b\leq 0 \text{ tiene } CS=\{m\}.$$

entonces: $\Delta=0$

$$\Delta=(-2)^2-4(2)(b)=0 \rightarrow b=\frac{1}{2}$$

ax^2+bx+c

$\Delta=b^2-4ac$

Por Cardano:

$$m+m=-\frac{-2}{2}=1 \rightarrow m=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{b+m=1}$$

Ejercicio (4)

Si el conjunto solución de la inecuación $x^2-(\beta-2)x-\frac{11}{4}>-\beta$ es $\mathbb{R}-\{\alpha\}$, halle el máximo valor de β.

A) 1 B) 7 C) 4 D) 5 E) 3

Resolución:

Como la inecuación: $x^2-(\beta-2)x-\frac{11}{4}+\beta>0$

tiene es $\mathbb{R}-\{\alpha\}$, entonces: $\Delta=0$

$$\Delta=(\beta-2)^2-4(1)\left(\beta-\frac{11}{4}\right)=0$$

$$\rightarrow \beta^2-4\beta+4-4\beta+11=0$$

$$\rightarrow \beta^2-8\beta+15=0 \rightarrow (\beta-3)(\beta-5)=0$$

Luego: $\beta=3$; $\beta=5$

$$\therefore\ \max(\beta)=5$$

Ejercicio (5)

Si el conjunto solución de la inecuación $\frac{4+x-4x^2}{x^2-x+1} \geq m$ es $\{\alpha\}$, halle el valor de $m\alpha$.

A) $-1/3$ B) $-13/3$ C) $-13/9$ D) $5/3$ E) 1

Resolución

Note que:

$$x^2-x+1>0 \quad \text{(siempre es positivo)}$$

Escribimos convenientemente la inecuación:

$$4+x-4x^2 \geq mx^2-mx+m$$

$$(m+4)x^2-(m+1)x+(m-4) \leq 0$$

Como la inecuación tiene CS unitario $\{\alpha\}$, entonces:

$$m+4>0 \quad \wedge \quad \triangle=(m+1)^2-4(m+4)(m-4)=0$$

$$m>-4 \quad \wedge \quad m^2+2m+1-4(m^2-16)=0$$

$$m>-4 \quad \wedge \quad -3m^2+2m+65=0$$

$$m>-4 \quad \wedge \quad 3m^2-2m-65=0$$

$$\begin{matrix} 3m & & 13 \\ m & & -5 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \quad (3m+13)(m-5)=0$$

$$\rightarrow \quad m=-\frac{13}{3} \ ; \ m=5:$$

Como: $m>-4$ entonces: $\boldsymbol{m=5}$:

Luego, la inecuación es: $9x^2-6x+1\leq 0$

$$(3x-1)^2 \leq 0 \rightarrow 3x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{3} \rightarrow \boldsymbol{\alpha=\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{m\alpha=5\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}}$$

Caso III: ($\Delta < 0$)

En este caso, el polinomio no tiene raíces reales.

Para su resolución podemos completar cuadrados

o aplicar el **Teorema del trinomio positivo.**

Teorema del trinomio positivo

Dado el polinomio $P_{(x)} = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

$P_{(x)} > 0;\ \forall\, x \in \mathbb{R} \iff a > 0 \ \wedge \ \Delta < 0$

Ejemplo

Para el polinomio $P_{(x)} = x^2 - x + 1$ se tiene:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0 \ \wedge \ a = 1 > 0$$

$$\rightarrow \underbrace{x^2 - x + 1}_{+} > 0;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Luego:

- $\underbrace{x^2 - x + 1}_{+} > 0 \rightarrow \text{CS} = \mathbb{R}$
- $\underbrace{x^2 - x + 1}_{+} \geq 0 \rightarrow \text{CS} = \mathbb{R}$
- $\underbrace{x^2 - x + 1}_{+} < 0 \rightarrow \text{CS} = \emptyset$
- $\underbrace{x^2 - x + 1}_{+} \leq 0 \rightarrow \text{CS} = \emptyset$

Teorema del trinomio no negativo

Dado el polinomio $P_{(x)} = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

$P_{(x)} \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R} \iff a > 0 \ \wedge \ \Delta \leq 0$

cerrado cerrado



Ejercicio (6)

Dado el polinomio $P_{(x)} = x^2 - 2nx + 9$, halle los valores de n, si se sabe que $P(x) \geq 0;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Resolución

Como $x^2 - 2nx + 9 \geq 0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$

Por el Teorema del trinomio no negativo,

se cumple que: $a = 1 > 0 \wedge \Delta \leq 0$

Luego: $\Delta = (2n)^2 - 4(1)(9) \leq 0$

$\leftrightarrow\ 4n^2 - 36 \leq 0 \ \leftrightarrow\ n^2 - 9 \leq 0$

$(n+3)(n-3) \leq 0 \ \rightarrow\ -3 \leq x \leq 3$

$\therefore\ \boldsymbol{n} \in [-\mathbf{3}; \mathbf{3}]$



ACADEMIA

CÉSAR VALLEJO

GRACIAS







academiacesarvallejo.edu.pe